ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÙY DUNG

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÙY DUNG

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Trang

Mở đầu

Giải tích Fourier đươc đặt theo tên nhà toán học đồng thời là nhà vật lý học người Pháp Jean Baptiste Joseph Fourier. Khi nghiên cứu sự lan truyền của nhiệt vào những năm 1800 đã đưa ra ý tưởng về một chuỗi điều hòa có thể mô tả bất kỳ chuyển động có chu kỳ nào kể cả là giá trị phức. Biến đổi Fourier là một phương pháp chuyển một tập hữu hạn các phân bố đều từ miền ban đầu (ví dụ như thời gian, . . .) thành miền tần số. Khái niệm toán học của biến đổi Fourier được áp dụng cho cả tập vô hạn các số phức và liên quan tới tính tích phân. Khái niệm biến đổi Fourier liên tục có nhiều ứng dụng trong vật lý và kỹ thuật. Tuy nhiên khi tính toán số thì ta cần biến đổi Fourier dạng rời rạc. Từ những ứng dụng của biến đổi Fourier dạng rời rạc này trong khoa học tính toán đã dẫn tới sự ra đời của phương pháp Fourier nhanh (FFT) vào năm 1965 bởi nghiên cứu của hai nhà toán học James Cooley và John Tukey. Biến đổi Fourier nhanh là một công cụ hữu hiệu để tính các biến đổi Fourier rời rạc và Fourier rời rạc ngược. Biến đổi FFT có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau đặc biệt trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số. Bên cạnh đó thì FFT cũng có ứng dụng không nhỏ trong việc tìm nghiệm số của phương trình đạo hàm riêng.

Luận văn được chia làm 2 chương.

Nội dung của Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản liên quan tới biến đổi FFT như: Biến đổi Fourier, hàm tuần hoàn, hàm xung, biến đổi Fourier dạng rời rạc và trình bày biến đổi FFT thông qua ví dụ trực giác.

Chương 2 trình bày một ứng dụng của biến đổi FFT trong việc tìm nghiệm số của phương trình truyền nhiệt tuyến tính hai chiều. Cũng trong chương này có trình bày một vài ví dụ số minh họa cho tính hữu hiệu của thuật toán đề xuất.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh tự đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của cô.

Em xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nhất là các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, đã tận tình giảng dạy tạo điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập tại trường. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K11 trường Đại học Khoa học đã giúp đỡ tôi trong quá trình hoc tập tại trường.

Em xin trân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Thùy Dung

Chương 1

Giới thiệu về phương pháp Fourier nhanh

Trong chương này trình bày một số kiến thức cần thiết liên quan tới phương pháp biến đổi Fourier như tích phân Fourier, biến đổi Fourier ngược, biến đổi Fourier ngược rời rạc, mối liên hệ giữa biến đổi Fourier liên tục và rời rạc,.... Nội dung của Chương 1 được viết dựa vào một phần nội dung của tài liệu [1, 2].

1.1. Biến đổi Fourier

1.1.1. Tích phân Fourier

Tích phân Fourier được xác định bởi biểu thức

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt. \tag{1.1}$$

Nếu tích phân tồn tại cho mọi giá trị của tham số f thì công thức (1.1) định nghĩa biến đổi Fourier $H(f)$ của $h(t)$. Thông thường $h(t)$ là hàm của biến thời gian và $H(f)$ được gọi là hàm của tần số. Ta sẽ sử dụng ký hiệu t là thời gian và f là tần số trong luận văn này. Hơn nữa, chữ thường sẽ biểu thị cho hàm thời gian; biến đổi Fourier của hàm thời gian này sẽ được biểu thị bằng chữ cái in hoa.

Nói chung, biến đổi Fourier là một đại lượng phức:

$$H(f) = R(f) + jI(f) = |H(f)|e^{i\theta(f)} \tag{1.2}$$

trong đó $R(f)$ là phần thực, $I(f)$ là phần ảo của biến đổi Fourier; $|H(f)|$ là độ lớn hoặc phổ Fourier của $h(t)$ và được cho bởi $\sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$; $\theta(f)$ là góc pha của biến đổi Fourier và được cho bởi $\tan^{-1}[I(f)/R(f)]$.

Ví dụ 1.1 Cho hàm

$$h(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Khi đó biến đổi Fourier của $h(t)$ được cho bởi

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-T}^{T} e^{-ift} = -\frac{1}{if}\left(e^{-ifT} - e^{ifT}\right)dt \\ &= \frac{2\sin fT}{f}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2 Để minh họa sự biến thiên các phần tử trong biến đổi Fourier, ta xét hàm của biến thời gian t

$$h(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

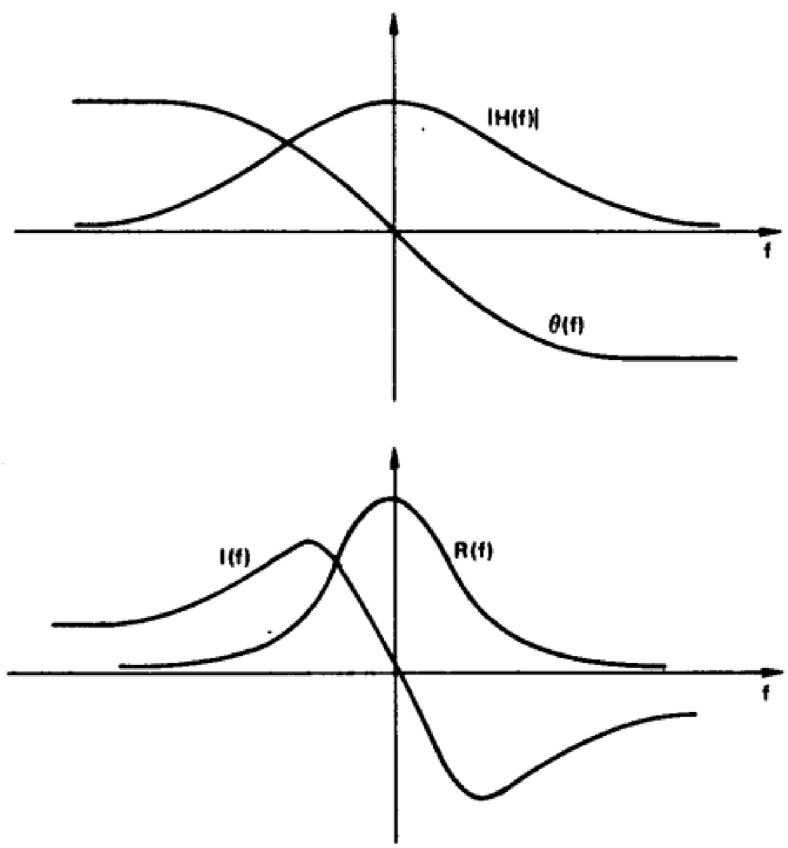
Theo công thức (1.1) ta có

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{0}^{\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-jft} = \beta \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + jf)t} dt \\ &= \frac{-\beta}{\alpha + jf} e^{-(\alpha+jf)t}|_0^\infty = \frac{\beta}{\alpha + jf} \\ &= \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + f^2} - j\frac{f\beta}{\alpha^2 + f^2} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + f^2}} e^{j\tan^{-1}[f/\alpha]}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$R(f) = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + f^2},$$
$$I(f) = \frac{f\beta}{\alpha^2 + f^2},$$
$$|H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + f^2}},$$
$$\theta(f) = \tan^{-1}\Big(\frac{f}{\alpha}\Big).$$

Ta có minh họa như hình dưới đây



Hình 1.1: Phần thực, phần ảo, độ lớn và góc pha trong biến đổi Fourier

1.1.2. Biến đổi Fourier ngược

Biến đổi Fourier ngược được định nghĩa như sau

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df \tag{1.3}$$

Phép biến đổi Fourier ngược (1.3) cho phép xác định hàm thời gian từ phép biến đổi Fourier của nó. Nếu các hàm $h(t)$ và $H(f)$ được xác định từ công thức (1.1) và (1.3) thì chúng được gọi là *cặp biến đổi Fourier* và ta sử dụng ký hiệu dưới đây để xác định mối quan hệ này

$$h(t) \Leftrightarrow H(f). \tag{1.4}$$

1.1.3. Sự tồn tại của tích phân Fourier

Định lý 1.1 *Nếu $h(t)$ khả tích theo nghĩa*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \tag{1.5}$$

thì biến đổi Fourier $H(f)$ tồn tại và thỏa mãn biến đổi Fourier ngược (1.3).

Chú ý rằng Định lý 1.1 là điều kiện đủ không phải điều kiện cần cho sự tồn tại của biến đổi Fourier. Có các hàm không thỏa mãn Định lý 1.1 nhưng có biến đổi thỏa mãn điều kiện (1.3), các hàm dạng này được cho trong định lý dưới đây.

Định lý 1.2 *Nếu hàm $h(t) = \beta(t)\sin(2\pi ft + \alpha)$ (trong đó f và α là hằng số bất kỳ), nếu $\beta(t+k) < \beta(t)$ và nếu với $|t| > \lambda > 0$ hàm $h(t)/t$ khả tích tuyệt đối theo nghĩa* (1.5) *thì $H(f)$ tồn tại và thỏa mãn biến đổi Fourier ngược* (1.3).

1.1.4. Tính chất của biến đổi Fourier

Tính chất 1. Tính tuyến tính Nếu $x(t)$ và $y(t)$ có các biến đổi Fourier tương ứng là $X(f)$ và $Y(f)$ thì tổng $x(t) + y(t)$ có biến đổi Fourier là $X(f) + Y(f)$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] e^{-i2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= X(f) + Y(f).\end{aligned}$$